

O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: PERSPECTIVAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

TEACHING GEOMETRIC TRANSFORMATIONS: THEORETICAL AND METHODOLOGICAL PERSPECTIVES

LA ENSEÑANZA DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS: PERSPECTIVAS TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

Natalia Nascimben Delmondi¹
Vinícius Pazuch²

Resumo: Este artigo tem como objetivo *apresentar e discutir uma situação de aprendizagem do Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, que aborda o conteúdo matemático de transformações geométricas, visando estabelecer uma relação com a literatura*, pois as transformações geométricas desenvolvem inúmeras habilidades nos estudantes, e os Cadernos vêm assumindo um protagonismo cada vez maior em sala de aula. A metodologia de análise consistiu nos critérios estabelecidos por Delmondi, Pazuch (no prelo). Os resultados mostraram que os Cadernos possuem uma carência de tarefas que abordem as transformações geométricas com caráter investigativo relacionadas com o cotidiano dos estudantes.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Documentos Curriculares. Formação de Professores.

Abstract: This article aims to present and discuss a learning situation textbook for Student of the State of São Paulo, which addresses the mathematical content of geometric transformations, aiming to establish a relationship with literature review, since geometric transformations develop innumerable abilities in students, and the textbooks have been assuming an increasing role in the classroom. The analysis methodology consisted of the criteria defined by Delmondi, Pazuch (in press). The results showed that the textbooks have a deficiency of tasks that approach the geometric transformations with investigative meaning related to the daily life of the students.

Keywords: Geometry Teaching. Curricular Materials. Teacher Education.

Resumen: Este artículo tiene como objetivo *presentar y discutir una situación de aprendizaje del Cuaderno del Alumno del Estado de São Paulo, que aborda el contenido matemático de transformaciones geométricas, buscando establecer una relación con la literatura*, dado que las transformaciones geométricas desarrollan innumerables habilidades en los estudiantes, y los Cuadernos vienen asumiendo un protagonismo cada vez mayor en el aula. La metodología de análisis consistió en los criterios establecidos por Delmondi, Pazuch (en prensa). Los resultados mostraron que los cuadernos poseen una carencia de tareas que aborden las transformaciones geométricas con carácter investigativo relacionadas con el cotidiano de los estudiantes.

Palabras clave: Enseñanza de la Geometría. Documentos Curriculares. Formación de Profesores.

Envio: 25/02/2019

Revisão: 25/02/2019

Aceite: 07/06/2019

¹ Graduanda em Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do ABC. natalia_delmondi@yahoo.com.br.

² Doutor em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal do ABC. vinicius.pazuch@ufabc.edu.br.

Introdução

As transformações geométricas consistem em um conteúdo matemático pertencente à área da geometria, em que são realizadas modificações em uma dada construção primária, para a obtenção de outras construções, conservando, porém, algumas propriedades da construção original. Assim, podem ser alteradas, na construção primária, sua posição espacial, através de reflexões com relação a um ponto ou a uma reta, rotações e translações. Essas transformações geométricas são consideradas isométricas, pois conservam, da figura original, ângulos, distâncias entre pontos, perímetros e áreas. Elas ainda podem ser homotetias, em que são conservados apenas os ângulos com relação à imagem de origem (Wagner, 2007).

O estudo desses conceitos proporciona aos estudantes muito mais do que o conhecimento de um novo tópico matemático, pois o raciocínio matemático dos estudantes é construído inicialmente a partir da visualização dos conceitos, para que depois ele passe para a abstração. Assim, o estudo das transformações geométricas contribui para que os estudantes desenvolvam tais habilidades, além de englobar conceitos como números e medidas, semelhanças e diferenças, e regularidades entre estruturas, sem necessidade de definição formal prévia (Lage, 2008; Medeiros, Gravina, 2015).

Embora as transformações geométricas sejam relevantes para auxiliar na construção do raciocínio matemático pelos estudantes, frequentemente, elas deixam de ser trabalhadas em sala de aula pelos professores, seja por não terem conhecimento sobre o tema, por darem prioridade a outros conteúdos mais importantes ou por acreditarem que não possuem os recursos didáticos necessários para trabalhar tais conceitos (Lage, 2008; Maia, 2014; Marschall, Fioreze, 2015; Medeiros, Gravina, 2015).

Um dos materiais didáticos mais relevantes atualmente nas escolas do estado de São Paulo são os *Cadernos do Aluno* e os *Cadernos do Professor do Estado de São Paulo*, que fazem parte do *Programa Faz Escola*, em vigência desde 2010, com o propósito de elevar o desempenho dos estudantes nas provas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP (Cassiari, 2011; Catanzaro, 2012). Dessa maneira, o conteúdo proposto pelos Cadernos está fortemente vinculado a esse sistema de avaliação e, portanto, são priorizados em sala de aula pelos professores.

Mediante essas considerações, estabelecemos como objetivo *apresentar e discutir uma situação de aprendizagem do Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, que aborda o conteúdo matemático de transformações geométricas, visando estabelecer uma relação com a literatura*. A seguir, discutiremos a revisão de literatura relacionada.

Revisão de Literatura

Ensino de Transformações Geométricas

O principal aporte teórico para a elaboração deste artigo foi o trabalho de Delmondi e Pazuch (2018), em que os autores realizaram uma revisão sistemática de literatura sobre as diferentes vertentes que envolvem o ensino de transformações geométricas. Essas vertentes serão apresentadas a seguir.

A primeira vertente relativa ao ensino de transformações geométricas que merece destaque é o conhecimento dos professores acerca do conteúdo de transformações geométricas. Autores como Hollebrands e Lee (2016), Santos e Bicudo (2015), Thompson e Senk (2014), Turgut, Yenilmez e Anapa (2014), Yanik (2011), e Yanik e Flores (2009), apontaram que os professores que ensinam o conteúdo de transformações geométricas possuem dificuldades em trabalhar esses conceitos com maior profundidade em sala de aula, por não dominá-los com propriedade. Ainda, esses autores ponderam que os professores que passaram por processos de formação continuada puderam aprimorar seus conhecimentos e suas habilidades de ensino do conteúdo de transformações geométricas.

Outra consideração relevante a ser destacada é com relação ao conhecimento dos estudantes sobre o conteúdo de transformações geométricas. Lacunas no conhecimento dos professores levam, conseqüentemente, a falhas no conhecimento dos estudantes, como apontam Chinnappan, Ekanayake e Brown (2012), Dejarnette et al. (2016), Gómez-Chacón, Albaladejo e López (2016), Heinze et al. (2008), Ng e Sinclair (2015), Papadopoulos e Dagdilelis (2008), Price e Lee (2009), Sinclair e Bruce (2015) e Yanik (2014). Esses autores também identificaram que o uso de atividades investigativas para o ensino de transformações geométricas pode proporcionar uma contribuição mais significativa para a aprendizagem dos estudantes. Indicaram também que um conhecimento mais expressivo nos conceitos de transformações

geométricas foi capaz de aprimorar a compreensão de outros conceitos matemáticos, como, por exemplo, o raciocínio lógico necessário para a realização de demonstrações e provas.

Alqahtani e Powell (2017), Amado, Sanchez e Pinto (2015), Isotani e Brandão (2013) e Mainali e Heck (2015) enfatizam a potencialização da aprendizagem dos conceitos de transformações geométricas por meio de *softwares* de geometria dinâmica. Segundo esses autores, o uso desses *softwares* facilita o entendimento e a visualização pelos estudantes; permite a concretização de conceitos normalmente abstratos e de difícil compreensão; e torna o ensino mais interessante e prazeroso, pois são recursos que se aproximam mais da realidade do estudante atual.

Já autores como Maciel, Rêgo e Carlos (2017), Matos e Silva (2011) e Santos e Teles (2012) direcionaram seus estudos para a forma como as transformações geométricas são apresentadas nos livros didáticos e constataram que elas são abordadas superficialmente nesses manuais, o que minimiza sua importância mediante outros conteúdos e faz com que, por vezes, nem sejam trabalhadas pelo professor em sala de aula.

Ainda tratando de recursos didáticos, Healy e Fernandes (2011) e Murari (2011) centraram seus estudos em materiais manipulativos para o ensino das transformações geométricas. Eles constataram que, assim como o uso dos *softwares*, esses materiais facilitam a visualização e a compreensão, pelos estudantes, de conceitos que inicialmente são abstratos e um maior envolvimento dos alunos com a realização da tarefa.

Um recurso que difere do ensino tradicional da matemática é a utilização da resolução de problemas e de sequências didáticas. Autores como Jacinto e Carreira (2016), Lopes, Alves e Ferreira (2015) e Vieira, Paulo e Allevato (2013) direcionaram seus estudos ao ensino de transformações geométricas, utilizando esses recursos metodológicos, e constataram que os estudantes apresentaram melhores desempenhos na resolução de tarefas propostas dessa maneira, pois não só solucionaram-nas corretamente, como consolidaram melhor os conceitos estudados.

A seguir, faremos uma breve exposição de como são apresentados os Cadernos do Aluno e os Cadernos do Professor do Estado de São Paulo.

Cadernos do Aluno e do Professor do Estado de São Paulo

Como descrevemos anteriormente, os Cadernos do Aluno e do Professor do Estado de São Paulo compõem o Currículo do Estado de São Paulo, implementado em 2010, por meio do *Programa Faz Escola*. Esse programa e os documentos que o compõem fazem parte de medidas da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo que visam contribuir para a melhoria do desempenho dos estudantes nas provas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP (Cassiari, 2011; Catanzaro, 2012). Dessa maneira, o Currículo do Estado de São Paulo tem a função de nivelar e uniformizar os conhecimentos e as competências mínimos necessários para que o estudante tenha um desenvolvimento considerado satisfatório (São Paulo, 2012).

O Currículo do Estado de São Paulo é composto por orientações com relação ao conteúdo a ser trabalhado em cada uma das etapas do Ensino Básico, além de materiais de apoio, como o Caderno do Gestor, com a finalidade de fornecer ao gestor da instituição de ensino orientações sobre a implementação do Currículo, e os Cadernos do Aluno e Cadernos do Professor, que são o nosso foco de análise neste artigo e propõem tarefas relacionadas com o conteúdo proposto pelo Currículo.

A descrição dos Cadernos do Aluno e do Professor a ser aqui apresentada foi realizada por Delmondi e Pazuch (no prelo). Segundo os autores, os dois Cadernos possuem estruturas semelhantes, apresentando o conteúdo por meio de situações de aprendizagem. Essas situações consistem em unidades temáticas que possuem diversas tarefas direcionadas ao conteúdo abordado, o qual se distribui em tópicos como *Contextualização da Atividade, Leitura e Análise de Texto, Você Aprendeu?, Lição de Casa, Pesquisa Individual, O Que eu Aprendi e Desafio*. Esses tópicos não estão necessariamente presentes em todas as situações de aprendizagem e podem ser encontrados em outra sequência, diferente da apresentada.

O Caderno do Professor possui, além das situações de aprendizagem, indicações da forma como o professor deve conduzir as tarefas; dos resultados esperados dos estudantes; e das competências e habilidades que serão desenvolvidas neles.

Nesse artigo, limitar-nos-emos a analisar e discutir o formato de apresentação das situações de aprendizagem presentes apenas nos Cadernos do Aluno do Estado de São Paulo. A metodologia utilizada e os resultados observados serão descritos a seguir.

Metodologia

Para a realização desta pesquisa, selecionamos um recorte da situação de aprendizagem 2, proposta no Volume 2 do Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, versão 2014-2017, destinado à 7.^a série³/8.^o ano do Ensino Fundamental, intitulada *Coordenadas Cartesianas e Transformações no Plano*. Essa situação de aprendizagem foi selecionada por apresentar diversas tarefas relacionadas às transformações geométricas, porém não foi analisada integralmente, pois, como o seu título indica, ela trata de dois temas: coordenadas cartesianas e transformações no plano. Como os itens de 1 a 8 abordam o primeiro conteúdo, que não fez parte do escopo desta pesquisa, foram analisados apenas os itens 9 a 14. Os critérios utilizados para a análise da situação de aprendizagem foram elaborados por Delmondi e Pazuch (no prelo), sendo eles:

- 1- As situações de aprendizagem propostas podem ser definidas como exercícios, problemas, investigações e/ou explorações que visam contribuir para aprendizagem dos estudantes?
- 2- As situações de aprendizagem expressam relação do conteúdo estudado com outros conteúdos matemáticos e com o cotidiano dos estudantes? (Delmondi, Pazuch, no prelo)

Tais critérios foram escolhidos por contemplarem dois aspectos. O primeiro deles relativo aos tipos de tarefas que podem ser utilizadas para abordar determinado conteúdo, pois cada uma delas possui sua relevância, dependendo do propósito do professor ao aplicá-las. Os tipos de tarefas presentes nesse critério foram definidos por Ponte (2014, p. 21, grifos do autor), que considera: “Um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido; Um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado; Uma *investigação* é uma tarefa aberta com desafio elevado; Uma *exploração* é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos”.

³ Essa nomenclatura, embora não seja mais utilizada atualmente, está presente nos Cadernos que compuseram a pesquisa.

O segundo aspecto contemplado por esses critérios é a contextualização do conteúdo estudado com o cotidiano dos estudantes. Assim, devemos buscar

[...] promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno. É com essas competências e habilidades que o aluno contará para fazer a leitura crítica do mundo, questionando-o para melhor compreendê-lo, inferindo questões e compartilhando ideias, sem, pois, ignorar a complexidade do nosso tempo (São Paulo, 2012, p. 14).


A seguir, serão apresentadas as análises realizadas com base nos critérios descritos anteriormente.

Resultados

Como já aqui referido, os Cadernos do Aluno apresentam tarefas aos estudantes, sem o propósito de apresentar definições teóricas sobre os conteúdos abordados. Assim, há apenas uma introdução do conteúdo a ser explorado nas tarefas, como podemos observar na Figura 1:

143

Figura 1: Apresentação do conceito de translação



Leitura e análise de texto

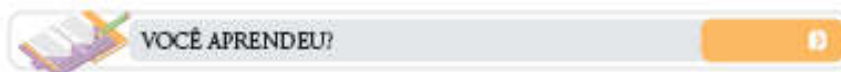
Chamamos **translação** o movimento de uma figura no plano em que todos os seus pontos são igualmente deslocados em uma determinada direção. A translação está associada a uma figura matemática denominada vetor, que indica a direção e a magnitude de um movimento.

Nesta atividade, vamos distinguir três tipos de translação. A **translação horizontal**, tanto no sentido da esquerda para a direita ($x + a$), quanto no sentido da direita para a esquerda ($x - a$). A **translação vertical**, de cima para baixo ($y - b$) ou de baixo para cima ($y + b$). E, finalmente, a **translação combinada**, que mescla movimentos na horizontal ou na vertical ($x \pm a; y \pm b$).

Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

Após essa breve contextualização, são introduzidas as tarefas que tratam de translações. A Figura 2 apresenta a tarefa 9, que tem como propósito verificar se os estudantes compreenderam os conceitos apresentados na Figura 1:

Figura 2: Tarefa 9 – Validação do conceito de translação

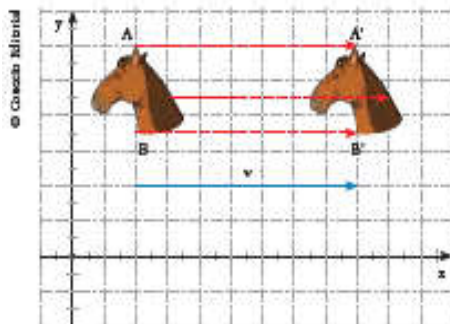


9. Relacione as figuras com as seguintes translações.

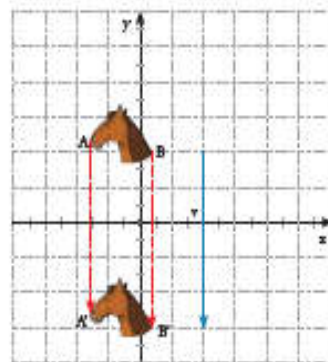
- Translação horizontal: $x + 7$ • Translação horizontal: $x - 7$ • Translação horizontal: $x - 10$
- Translação vertical: $y + 5$ • Translação vertical: $y - 5$ • Translação vertical: $y + 5$
- Translação combinada: $(x + 4; y - 3)$ • Translação combinada: $(x - 4; y + 3)$

I. _____

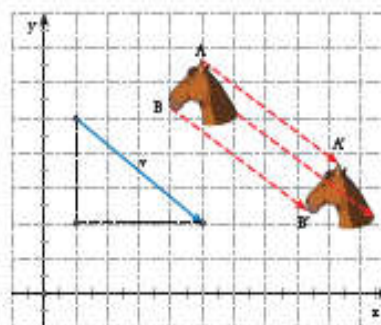
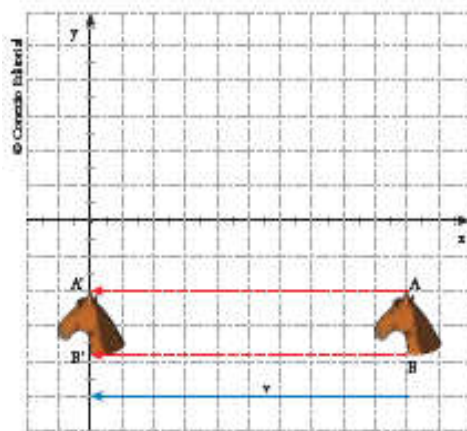
II. _____



III. _____



IV. _____



Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

Como se trata de uma tarefa introdutória ao conceito de translação, podemos observar que ela é simples e não proporciona grandes desafios aos estudantes. Além disso, há uma única possibilidade de solução. Portanto, pode ser considerada um *exercício*.

A Figura 3 ilustra a tarefa 10, que possui um raciocínio de resolução semelhante ao da tarefa 9. No entanto, o estudante deve construir a figura indicada antes de realizar as transformações solicitadas:

Figura 3: Tarefa 10 – Aplicação do conceito de translação (1)

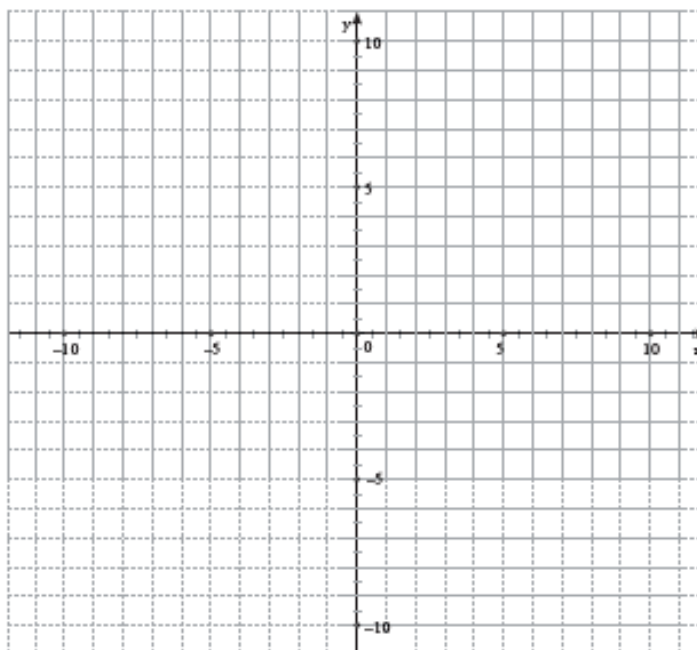
10. Desenhe, no plano cartesiano, um triângulo ABC cujos vértices têm coordenadas A(3; 2), B(7; 3) e C(4; 5).

a) A partir do triângulo ABC, aplique, sucessivamente, as seguintes translações:

I. Translação horizontal ($x - 6$), obtendo o triângulo $A'B'C'$.

II. Translação vertical ($y - 10$), obtendo o triângulo $A''B''C''$.

III. Translação combinada ($x + 8$; $y + 2$), obtendo o triângulo $A'''B'''C'''$.



b) Registre na tabela a seguir as novas coordenadas obtidas após cada translação.

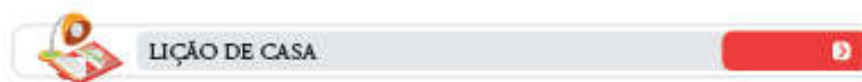
ΔABC (x; y)	Translação horizontal $\Delta A'B'C'$ (x - 6; y)	Translação vertical $\Delta A''B''C''$ (x; y - 10)	Translação combinada $\Delta A'''B'''C'''$ (x + 8; y + 2)
A (3; 2)	A'	A''	A'''
B (7; 3)	B'	B''	B'''
C (4; 5)	C'	C''	C'''

Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.ª série/8.º ano (São Paulo, 2014.)

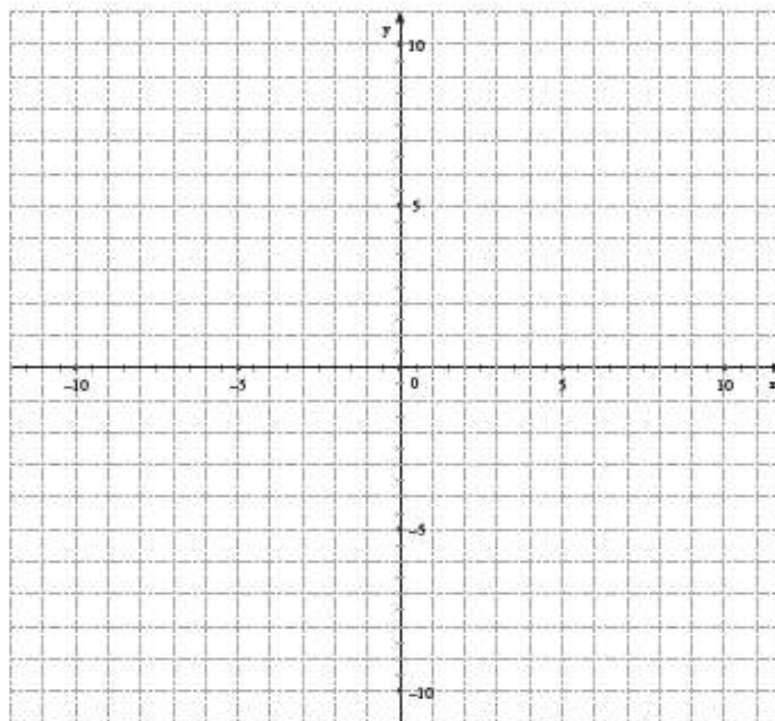
Embora esta tarefa contenha um desafio mais elevado em relação à anterior, pois demanda que o estudante realize uma construção antes de aplicar a transformação indicada, ela ainda é fechada, pois a construção a ser realizada é definida pela questão. Dependendo do nível de conhecimento dos estudantes, essa tarefa pode ser mais ou menos desafiadora. Portanto, pode ser classificada como *exercício*, se num dado contexto for menos desafiadora, ou como um *problema*, se for mais desafiadora em outro contexto.

A tarefa 11, exposta na Figura 3, é proposta como lição de casa, e segue o mesmo raciocínio que as tarefas 9 e 10:

Figura 4: Tarefa 11 – Aplicação do conceito de translação (2)



11. Agora é sua vez. Invente um polígono qualquer e desenhe-o no plano cartesiano. Indique os vértices por letras e anote suas coordenadas. Em seguida, aplique duas translações diferentes no polígono original. Preste atenção nas coordenadas e nas translações escolhidas. O polígono não pode sair do espaço definido pelo plano cartesiano da atividade.



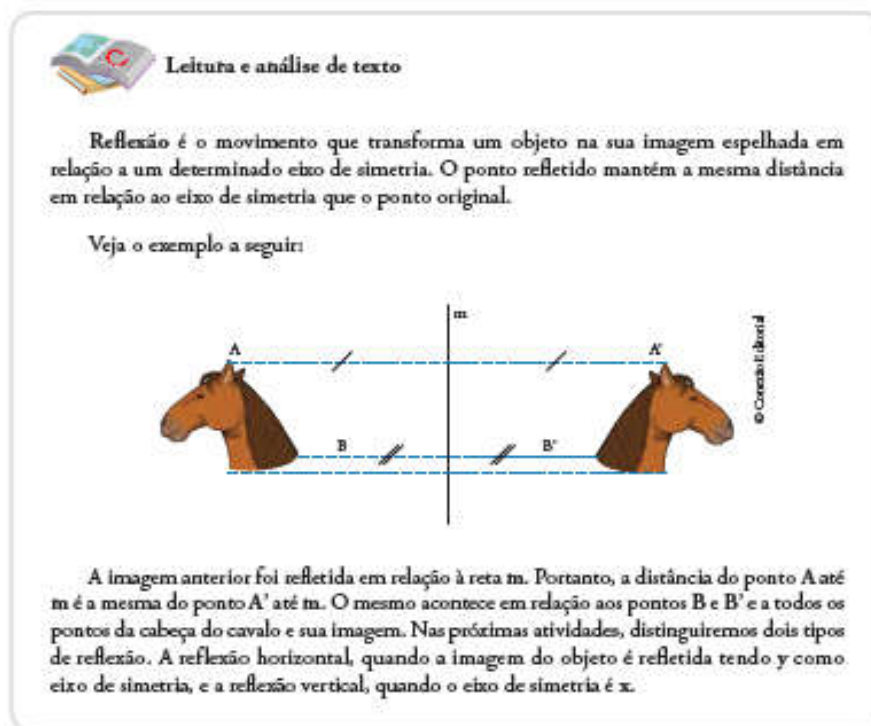
Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

Esta tarefa, proposta para finalizar o trabalho do conteúdo de translação, apresenta como diferencial das tarefas 9 e 10 a possibilidade que o estudante tem de construir a figura que desejar, o que lhe oferece diversas possibilidades de resolução. Logo, a tarefa 11 é aberta, e a dificuldade de execução dependerá do nível em que os estudantes se encontram. Portanto, pode ser uma *exploração*, se proporcionar desafios reduzidos, ou uma *investigação*, se proporcionar desafios elevados. Vale ressaltar que um trabalho investigativo possui outras características, como, por exemplo, uma discussão posterior à realização da tarefa, para que os estudantes possam observar e debater os trabalhos desenvolvidos pelos demais estudantes da classe, a fim de ampliar o repertório de possibilidades de solução que uma mesma proposta apresenta. Logo, uma tarefa com características investigativas não garante o trabalho investigativo por meio dela, pois isso dependerá da maneira como o professor conduzirá a tarefa.

Posteriormente, assim como na Figura 1, é apresentado um novo conceito relacionado às transformações geométricas: o de reflexão, como mostra a Figura 5:

147

Figura 5: Introdução do conceito de reflexão

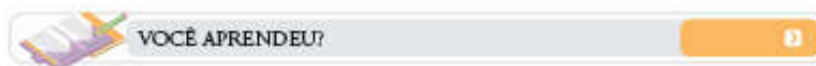


Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

A tarefa 11 possui o mesmo perfil da tarefa 9, ou seja, apresentar um novo conceito aos estudantes; logo, é bastante simples e direta, podendo também ser classificada como um *exercício*.

Com relação ao conceito de reflexão, não houve uma tarefa de validação de conceitos, como no caso do conceito de translação, pois a tarefa 12 apresenta procedimentos de execução similares aos da tarefa 10, como revela a Figura 6:

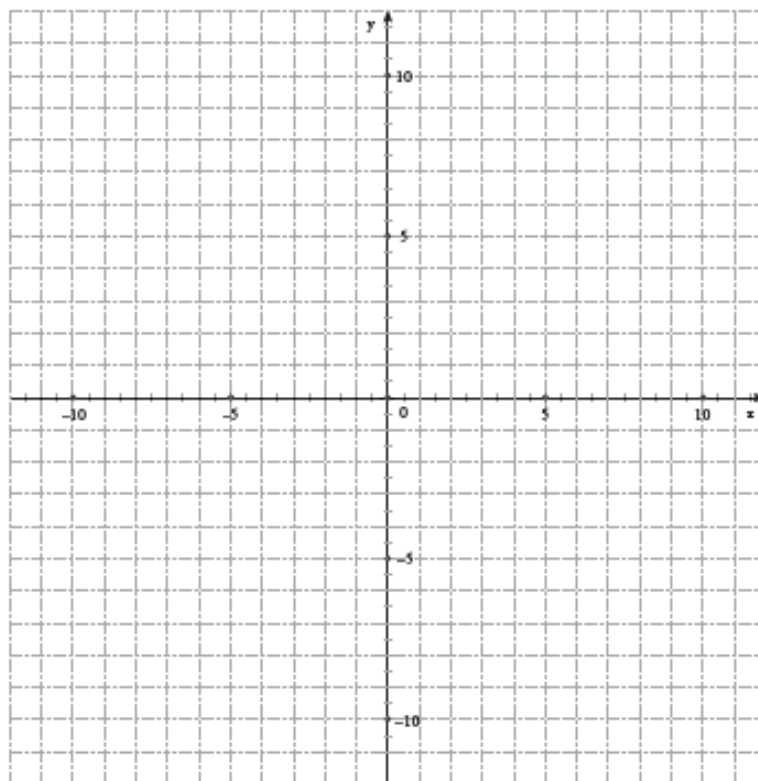
Figura 6: Tarefa 12 – Aplicação do conceito de reflexão (1)



12. Desenhe, no plano cartesiano, um quadrilátero ABCD cujos vértices têm coordenadas A (2; 2), B (6; 3), C (2; 4) e D (4; 3).

a) A partir da figura obtida, realize as seguintes transformações:

- I. Reflexão horizontal do quadrilátero ABCD, obtendo o quadrilátero A'B'C'D'.
- II. Reflexão vertical do quadrilátero A'B'C'D', obtendo o quadrilátero A''B''C''D''.
- III. Reflexão horizontal do quadrilátero A''B''C''D'', obtendo o quadrilátero A'''B'''C'''D'''.



149

b) Registre na tabela a seguir as novas coordenadas obtidas após cada reflexão.

ABCD (x; y)		A'B'C'D' (;)		A''B''C''D'' (;)		A'''B'''C'''D''' (;)	
A	(2; 2)	A'		A''		A'''	
B	(6; 3)	B'		B''		B'''	
C	(2; 4)	C'		C''		C'''	
D	(4; 3)	D'		D''		D'''	

c) O que acontece com as coordenadas dos vértices na reflexão horizontal?

d) E na vertical?

e) Com base nessas conclusões, e observando a tabela de coordenadas, qual será a posição do quadrilátero $A''B''C''D''$ depois de uma reflexão vertical?


Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

Logo, da mesma maneira que a tarefa 10, a tarefa 12 é fechada, e pode ser classificada como um *exercício* ou um *problema*, de acordo com o desafio que ela possa proporcionar nos estudantes.

A tarefa 13, assim como a 11, também é apresentada como lição de casa, mas possui uma estrutura diferente das anteriores, o que pode ser observado na Figura 7:

150

Figura 7: Tarefa 13 – Aplicação do conceito de reflexão (2)


LIÇÃO DE CASA
D

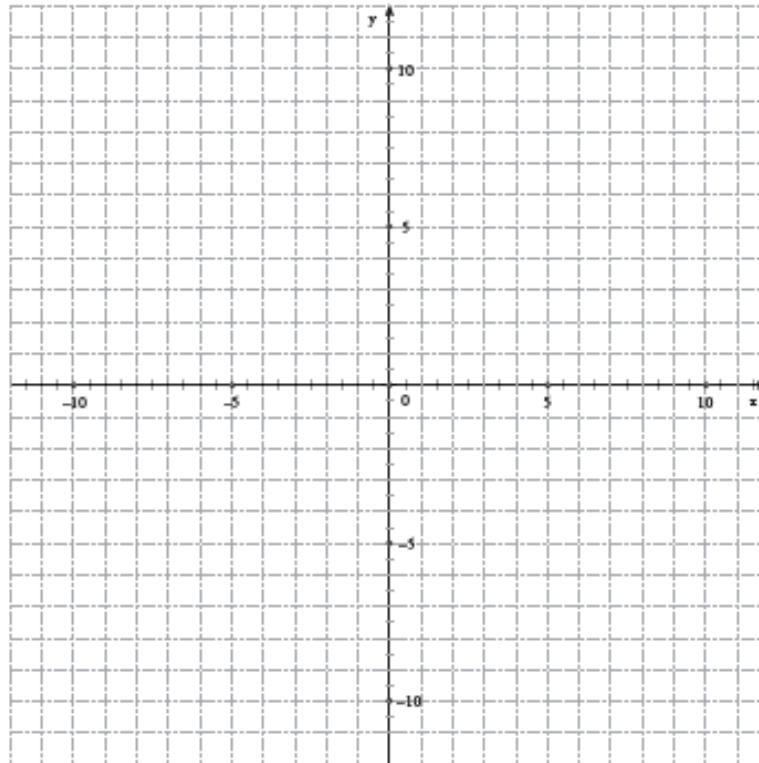
13. Nesta atividade, você vai proceder de maneira diferente das anteriores. Considere o triângulo MNO de coordenadas M (-4; 5), N (2; 1) e O (-2; 7).

a) Antes de representá-lo no plano, e tendo como base os resultados obtidos nas atividades 10 e 12 da seção *Você aprendeu?*, preencha a tabela com as coordenadas dos triângulos obtidos depois das seguintes transformações:

- I. Reflexão horizontal do triângulo MNO, obtendo o triângulo $M'N'O'$.
- II. Reflexão vertical do triângulo $M'N'O'$, obtendo o triângulo $M''N''O''$.
- III. Translação $(x - 6; y + 4)$ do triângulo $M''N''O''$, obtendo o triângulo $M'''N'''O'''$.

ΔMNO (x; y)	$\Delta M'N'O'$ (;)	$\Delta M''N''O''$ (;)	$\Delta M'''N'''O'''$ (;)
M	M'	M''	M'''
N	N'	N''	N'''
O	O'	O''	O'''

- b) Agora, desenhe o triângulo MNO no plano e aplique as transformações I, II e III. Em seguida, verifique se as coordenadas das figuras obtidas são as mesmas da tabela que você preencheu. Se forem, você já é capaz de fazer translações e reflexões sem o auxílio de um gráfico.



151

Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

Diferentemente das anteriores, a tarefa 13 propõe que o estudante determine primeiramente as coordenadas da transformação geométrica a ser realizada na figura proposta, para depois efetuá-la, com a finalidade de expressar se o estudante foi capaz de compreender o conceito abstratamente, e não só através de representações pictóricas. No entanto, assim como a maioria das tarefas, essa proposta possui apenas uma possibilidade de solução; é, portanto, fechada. Ainda, os desafios proporcionados pela tarefa 13 dependerão da compreensão, pelos estudantes, dos conceitos prévios para sua execução. Portanto, os desafios podem ser elevados ou reduzidos, e ela pode ser enquadrada como um *exercício* ou como um *problema*.

A última tarefa proposta dá continuidade à tarefa 13 (Figura 8):

Figura 8: Tarefa 14 – Aplicação do conceito de reflexão (3)

14. Você já aprendeu que quando somamos ou subtraímos um mesmo número das coordenadas x e/ou y dos pontos de uma figura, o movimento decorrente é uma _____ . Quando trocamos o sinal da coordenada x de determinado ponto, o movimento é chamado de _____. E, quando trocamos o sinal da coordenada y , o movimento decorrente é uma _____ .

Fonte: Caderno do Aluno: Matemática 7.^a série/8.^o ano (São Paulo, 2014.)

A finalidade aqui é realizar uma conexão e um fechamento entre os dois tópicos matemáticos abordados na situação de aprendizagem: coordenadas cartesianas e transformações no plano. No entanto, é uma tarefa simples, com soluções fechadas, um *exercício*.

152

Discussão

Em relação aos aspectos identificados na revisão de literatura, temos, primeiramente, os livros didáticos. Segundo os estudos de Maciel, Rêgo e Carlos (2017), Matos e Silva (2011) e Santos e Teles (2012), os livros didáticos não oferecem um número significativo de tarefas direcionadas ao ensino de transformações geométricas e, quando elas aparecem, são simples e diretas, mais semelhantes aos exercícios. Isso faz com que os professores desenvolvam esse conteúdo sem nada acrescentar ao que é proposto pelos livros. Com relação aos Cadernos, é necessário ressaltar que eles são apenas um material complementar e não apresentam uma estrutura semelhante ao de um livro didático. No entanto, as tarefas relacionadas às transformações geométricas são encontradas em pelo menos uma situação de aprendizagem em todos os anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Portanto, as transformações geométricas são abordadas nos Cadernos em proporções mais equilibradas do que outros conteúdos da geometria e de outras áreas da matemática.

Outro aspecto evidenciado pela revisão de literatura foi o uso de *softwares* de geometria dinâmica para o ensino das transformações geométricas. Em geral, a literatura aponta que o ensino da matemática como um todo ainda é voltado para metodologias mais tradicionais,

porém a utilização de outros recursos metodológicos para o ensino pode despertar maior interesse dos estudantes e facilitar a sua aprendizagem. Isso pôde ser constatado nos estudos de Alqahtani e Powell (2017), Amado, Sanchez e Pinto (2015), Isotani e Brandão (2013) e Mainali e Heck (2015), nos quais os estudantes se envolveram mais nas tarefas, e conseqüentemente, apresentaram uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos de transformações geométricas. No entanto, o uso desses recursos não é destacado nos Cadernos, que propõem uma abordagem mais tradicional, como ainda ocorre na maioria dos recursos didáticos utilizados para o ensino da matemática.

Por fim, tratando de materiais manipulativos, temos uma situação semelhante ao dos *softwares* de geometria dinâmica. Embora os materiais manipulativos auxiliem na visualização e no entendimento de conceitos abstratos pelos estudantes, eles são escassos nas situações de aprendizagem propostas pelos Cadernos.

Após a análise das tarefas que tratam de transformações geométricas presentes na situação de aprendizagem selecionada, pudemos responder às questões propostas, na metodologia, sobre os tipos de tarefas e a contextualização delas com os estudantes:

153

- 1- *As situações de aprendizagem propostas podem ser definidas como exercícios, problemas, investigações e/ou explorações que visam contribuir para aprendizagem dos estudantes?* Constatamos que a maioria delas pode ser considerada como exercício ou exploração, pois são tarefas fechadas, que podem proporcionar maiores ou menores desafios aos estudantes. Tais desafios são decorrentes do nível de aprendizagem em que os estudantes se encontram, bem como dos recursos e das abordagens utilizadas pelo professor em sala de aula. Embora tarefas fechadas sejam relevantes para que o estudante possa averiguar a compreensão de um determinado conteúdo, tarefas *exploratórias* e *investigativas* também são importantes, pois elas ampliam as possibilidades de tratamento e de internalização de conceitos, já que demandam do estudante uma maior interação com a tarefa. Apenas uma tarefa com potencial para possuir esse perfil foi proposta na situação de aprendizagem, e sua eficácia dependerá de como o professor conduzirá a resolução.
- 2- *As situações de aprendizagem expressam relação do conteúdo estudado com outros conteúdos matemáticos e com o cotidiano dos estudantes?* Nessa situação de

aprendizagem, as transformações geométricas estão fortemente associadas a outro conteúdo matemático – o de coordenadas cartesianas. Essa conexão é extremamente importante, pois evidencia a aplicabilidade das transformações geométricas, tanto para os professores, que podem utilizá-las para desenvolver nos estudantes habilidades necessárias para outros tópicos matemáticos, quanto para os estudantes, que podem verificar, através dessas tarefas, para qual finalidade as transformações geométricas podem ser utilizadas. No entanto, não há nenhuma conexão, seja por uma situação real ou hipotética, com algum aspecto que se aproxime do cotidiano dos estudantes.

Considerações Finais

A literatura aponta lacunas, no conhecimento dos professores e dos estudantes, sobre transformações geométricas, e há uma carência de materiais didáticos que abordem esta temática com maior profundidade.

Assim, optamos por estudar o material didático fornecido pelo Estado de São Paulo, pelo protagonismo que ele vem assumindo nas escolas estaduais, buscando refletir como as transformações geométricas são tratadas nele. Logo, estabelecemos como objetivo *apresentar e discutir uma situação de aprendizagem do Caderno do Aluno do Estado de São Paulo, que aborda o conteúdo matemático de transformações geométricas, visando estabelecer uma relação com a literatura*. Para cumprir este objetivo, apoiamos-nos em dois critérios de análise para a situação de aprendizagem, estabelecidos por Delmondi e Pazuch (no prelo).

A revisão de literatura apontou para fragilidades no conteúdo de transformações geométricas nos livros didáticos e para um melhor desempenho na aprendizagem dos estudantes sobre transformações geométricas, quando foram utilizadas tarefas exploratórias e investigativas e *softwares* de geometria dinâmica. Com relação a esses aspectos, pudemos inferir que o conteúdo de transformações geométricas apresenta uma certa relevância nos Cadernos, aparentemente maior que nos livros didáticos. No entanto, são poucas as indicações do uso de *softwares* e materiais manipulativos nos Cadernos que possam potencializar a aprendizagem dos estudantes.

A análise das tarefas que tratam de transformações geométricas presentes na situação de aprendizagem selecionada evidenciou (1) a carência de tarefas exploratórias e investigativas; e (2) a falta de relação das tarefas com o cotidiano dos estudantes. Embora a revisão de literatura tenha apontado melhores resultados quando foram utilizadas tarefas investigativas, sua inserção na sala de aula para o ensino de transformações geométricas ainda não é usual, o que condiz com o que foi observado nos Cadernos. Portanto, esta pesquisa apresenta potencialidades para a sua continuidade, por meio da elaboração de tarefas investigativas, com o uso de materiais manipulativos ou *softwares* de geometria dinâmica, relacionadas com o contexto dos estudantes, que abordem o conteúdo matemático de transformações geométricas baseadas nas situações de aprendizagem propostas pelos Cadernos do Aluno do Estado de São Paulo.

Referências

- ALQAHTANI, M. M.; POWELL, A. B. Mediation activities in a dynamic geometry environment and teachers' specialized content knowledge. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 48, p. 77-94, 2017.
- AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.
- CASSIARI, E. R. **Potencialidades e fragilidades na implementação do “Caderno do Professor” e “Caderno do Aluno” da rede estadual de São Paulo**. 2011.102 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.
- CATANZARO, F. O. **O Programa São Paulo Faz Escola e suas apropriações no cotidiano de uma escola de ensino médio**. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- CHINNAPPAN, M.; EKANAYAKE, M. B.; BROWN, C. Knowledge use in the construction of geometry proof by Siri Lankan students. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 10, n. 4, p. 865-887, 2012.
- DEJARNETTE, A. F. et al. Students' conceptions of reflection: opportunities for making connections with perpendicular bisector. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 43, p. 35-52, 2016.
- DELMONDI, N. N.; PAZUCH, V. Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. Brasília, v. 99, n. 253, p. 659-686, set./dez. 2018.

_____. O ensino de transformações geométricas: uma análise dos cadernos do aluno e do professor do estado de São Paulo. **Revista Educação Matemática – ReMat**. (no prelo).

GÓMEZ-CHACÓN, I. M.; ALBALADEJO, I. M. R.; LÓPEZ, M. M. G. Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: A mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. **ZDM**, Hamburgo, v. 48, n. 6, p. 909-924, 2016.

HEALY, L.; FERNANDES, S. H. A. A. Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 227-243, 2011.

HEINZE, A. et al. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. **ZDM**, Hamburgo, v. 40, n. 3, p. 443-453, 2008.

HOLLEBRANDS, K. F.; LEE, H. S. Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry tasks. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 43, p. 18-16, 2016.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. O papel do professor e do aluno frente ao uso de um software de geometria interativa: iGeom. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 45, p. 165-192, abr. 2013.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 6, p. 1115-1136, 2016.

LAGE, M. A. **Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano**. 2008. 171 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LOPES, L. S.; ALVES, G. L. P.; FERREIRA, A. L. A. A simetria nas aulas de Matemática: uma proposta investigativa. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 549-572, abr./jun. 2015.

MACIEL, A. M.; RÊGO, R. G.; CARLOS, E. J. Possibilidades pedagógicas do uso da imagem fotográfica no livro didático de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 344-364, abr. 2017.

MAIA, C. M. F. **As isometrias na inovação curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico**. 2014. 332 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Ciências da Educação e do Património, Universidade Portucalense, Porto, Portugal, 2014.

MAINALI, B. R.; HECK, A. Comparison of traditional instruction on reflection and rotation in a Nepalese high school with an ICT-rich, student-centered, investigative approach. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 15, n. 3, p. 487-507, 2015.

MARSCHALL, J.; FIOREZE, L. A. **GeoGebra no ensino das transformações geométricas**: uma investigação baseada na teoria da negociação de significados. Porto Alegre: UFRGS, 2015.

MATOS, J. M.; SILVA, M. C. L. O Movimento da Matemática Moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de geometria no Brasil e em Portugal. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 171-196, abr. 2011.

MEDEIROS, M. F.; GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano. **Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, 2015.

MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

NG, O. L.; SINCLAIR, N. Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. **ZDM**, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 421-434, 2015.

PAPADOPOULOS, I.; DAGDILELIS, V. Students' use of technological tools for verification purposes in geometry problem solving. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 27, n. 4, p. 311-325, 2008.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2014.

PRICE, A.; LEE, H. S. The effect of two-dimensional and stereoscopic presentation on Middle School students' performance of spatial cognition tasks. **Journal of Science Education and Technology**, Gainesville, v. 19, n. 1, p. 90-103, 2009.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 291-310, abr. 2012.

SANTOS, M. R.; BICUDO, M. A. V. Uma experiência de formação continuada com professores de Arte e Matemática no ensino de Geometria. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1329-1347, dez. 2015.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. 1. ed. São Paulo: SE, 2012.

_____. **Caderno do aluno: Matemática – 7.ª série/8.º ano**, v. 2. São Paulo: IMESP, 2014.

SINCLAIR, M.; BRUCE, C. D. New opportunities in Geometry education at the primary school. **ZDM**, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 319-329, 2015.

THOMPSON, D. R.; SENK, S. L. The same Geometry textbook does not mean the same classroom enactment. **ZDM**, Hamburgo, v. 46, n. 5, p. 781-795, 2014.

TURGUT, M.; YENILMEZ, K.; ANAPA, P. Symmetry and rotation skills of prospective elementary Mathematics teachers. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 383-402, abr. 2014.

VIEIRA, G.; PAULO, R. M.; ALLEVATO, N. S. G. Simetria no Ensino Fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 613-630, ago. 2013.

WAGNER, E. **Construções geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

YANIK, H. B. Prospective Middle School Mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. **Educational Studies in Mathematics**, Limerick, v. 78, n. 2, p. 231-260, 2011.

_____. Middle-School students' concept images of geometric translations. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 36, p. 33-50, 2014.

YANIK, H. B.; FLORES, A. Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 28, n. 1, p. 41-57, 2009.