

## VARIAÇÃO DE TEMPERATURA EM UMA ESTRUTURA BIDIMENSIONAL: ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL

## VARIATION OF TEMPERATURE IN A TWO-DIMENSIONAL STRUCTURE: THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS

## VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA EN UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL: ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL

Fábio Gaspar dos Santos Júnior<sup>1</sup>  
Ana Carolina Carius<sup>2</sup>  
Bruna Teixeira Silveira<sup>3</sup>  
Mariana Anastácia de Oliveira<sup>4</sup>

192

**Resumo:** O presente trabalho apresenta o estudo da transferência de calor por condução em placas retangulares homogêneas. Objetivou-se, com a pesquisa desenvolvida, validar o modelo matemático para o problema em questão através de duas metodologias: simulações numéricas e ensaios laboratoriais. O teste de hipótese de Kolmogorov-Smirnov foi utilizado para garantir que as medidas experimentais obtidas nos ensaios laboratoriais representavam uma distribuição normal. Erros absolutos e relativos foram calculados, a fim de verificar a discrepância entre os valores para a temperatura na placa através dos dois métodos de pesquisa propostos. Concluiu-se que o modelo computacional simula com precisão o experimento laboratorial.

**Palavras-chave:** Temperatura. Metal. Simulação Computacional. Kolmogorov-Smirnov.

**Abstract:** The present work presents the study of heat transfer by conduction in homogeneous rectangular plates. The aim of the research was to validate the mathematical model for the problem in question through two methodologies: numerical simulations and laboratory tests. The Kolmogorov-Smirnov hypothesis test was used to ensure that the experimental measurements obtained in the laboratory tests represented a normal distribution. Absolute and relative errors were calculated in order to verify the discrepancy between the values for plate temperature through the two proposed methods of research. It was concluded that the computational model accurately simulates the laboratory experiment.

**Keywords:** Temperature. Metal. Computer Simulation. Kolmogorov-Smirnov.

<sup>1</sup> Graduado em Engenharia Mecânica pela Universidade Católica de Petrópolis. Universidade Católica de Petrópolis. E-mail: fabiogaspar15@gmail.com.

<sup>2</sup> Doutora em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica. Universidade Católica de Petrópolis. E-mail: ana.carius@ucp.br.

<sup>3</sup> Doutoranda em Engenharia Civil/Geotecnia pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. E-mail: brunasilveira@gmail.com.

<sup>4</sup> Doutoranda em Engenharia Metalúrgica e de Materiais pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Universidade Católica de Petrópolis. E-mail: mariana.oliveira@metalmat.ufrj.br.

**Resumen:** El presente trabajo presenta el estudio de la transferencia de calor por conducción en placas rectangulares homogéneas. Se objetivó, con la investigación desarrollada, validar el modelo matemático para el problema en cuestión a través de dos metodologías: simulaciones numéricas y ensayos de laboratorio. La prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov se utilizó para garantizar que las medidas experimentales obtenidas en los ensayos de laboratorio representaban una distribución normal. Se calcularon errores absolutos y relativos para verificar la discrepancia entre los valores para la temperatura en la placa a través de los dos métodos de búsqueda propuestos. Se concluyó que el modelo computacional simula con precisión el experimento de laboratorio.

**Palabras-clave:** Temperatura. Metal. Simulación Computacional. Kolmogorov-Smirnov.

**Envio 04/09/2018**

**Revisão 04/09/2018**

**Aceite 29/07/2019**

## Introdução

O processo de transferência de calor é um fenômeno de interesse em diversas áreas da engenharia e, por esse motivo, é amplamente estudado. O presente estudo encontra aplicação direta, sobretudo, na engenharia mecânica e na engenharia civil, onde a presença de estruturas compostas por metais requer atenção a demandas específicas deste tipo de material e estudos detalhados do comportamento do mesmo são exigidos. Sempre que há um gradiente de temperatura no interior de um sistema ou quando há contato entre dois sistemas com temperaturas diferentes, há um processo denominado *transferência de calor* que, de forma geral, pode se dar de três formas distintas: convecção, condução e radiação. Este trabalho estudou o processo de transferência de calor por condução representado, em sua forma estacionária, pela Equação de Laplace:

$$u = 0, \quad (1)$$

cujos domínio é um retângulo.

A Equação de Laplace aparece, pela primeira vez, em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica, datado de 1752. A equação ficou com o nome de Laplace em honra a Pierre-Simon Laplace (1749-1827) que, a partir de 1782, estudou extensivamente suas soluções enquanto investigava a atração gravitacional entre corpos no espaço. A Equação de Laplace é conhecida em muitos problemas da Física Matemática, como, por exemplo, no estudo de campos eletrostáticos, na função potencial elétrico em um meio dielétrico sem cargas elétricas e, para interesse deste trabalho, na representação da temperatura no estado estacionário (Iório, 2010). A partir da metade do século XVIII, motivados pelo problema de vibração de cordas, diversos matemáticos se debruçaram sobre estudos de expansão de funções em forma de séries trigonométricas. Alguns nomes se destacaram nesse campo, como Euler, Bernoulli, D'Alembert e Lagrange. No entanto, foi com Fourier que a solução para o problema de condução de calor através da Equação de Laplace foi formalizada através de expansões em séries trigonométricas.

Devido ao caráter histórico do problema de condução do calor via Equação de Laplace, muito investigou-se, até o presente, sobre o papel das soluções encontradas para a mesma, sobretudo do ponto de vista analítico, marcada pela obtenção de soluções através do método de

Separação de Variáveis para Equações Diferenciais Parciais (EDP's), contendo Séries de Fourier.

Este trabalho apresenta um recorte para o fenômeno de transferência de calor por condução baseado em três aspectos: solução analítica clássica através de Séries de Fourier; análise computacional da variação de calor em uma placa retangular, objetivando a verificação computacional da solução analítica e propiciando melhor visualização da temperatura em cada ponto da placa retangular e a realização de ensaios laboratoriais com placas retangulares homogêneas, compostas por metais, a fim de garantir que os valores para a temperatura obtidos experimentalmente eram suficientemente precisos quando comparados aos valores fornecidos pela análise computacional.

### **Revisão da literatura: a solução para a Equação de Laplace através do método de Separação de Variáveis**

Conforme descrito na Introdução, o desenvolvimento deste trabalho se inicia pela construção da solução para a equação de Laplace que, quando utilizada para modelar o fenômeno de transferência de calor, é chamada de equação do calor de Lewis (Moreira, 2015). Por se tratar de uma Equação Diferencial Parcial, as soluções para a Equação de Laplace são obtidas pelo método de Separação de Variáveis, o qual utiliza a expansão de funções através de Séries de Fourier.

195

Assume-se, por hipótese, que a transferência de calor se dá por condução em uma placa retangular bidimensional, cujas dimensões são  $[0, L]$  e  $[0, ]$ , em regime permanente sem geração de calor interno. Denota-se por  $T_1$  a temperatura em três bordas desta placa e por  $T_2$  a temperatura na borda superior da placa retangular, diferente da temperatura nas outras três bordas.

Considera-se a equação do calor

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

cujas condições de contorno são

$$T(0, y) = T(L, y) = T(x, 0) = T_1,$$

$$T(x, ) = T_2.$$

Uma vez que o regime é estacionário, a equação (2) se reduz a

$$\nabla^2 T = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

A fim generalizar o problema (3) com suas respectivas condições inicial e de contorno, introduz-se a variável  $\theta$  em função da variável temperatura  $T$

$$\frac{T-T_1}{T_1-T_2} = \theta.$$

A partir da mudança proposta, o problema (3) e suas respectivas condições de contorno são

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta(L, y) = \theta(x, 0) = 0, \quad (4)$$

$$\theta(x, ) = 1.$$

Como a função  $\theta$  depende de duas variáveis,  $x$  e  $y$ , supõe-se que esta dependência se dá como segue

$$\theta(x, y) = X(x) Y(y),$$

onde  $X$  é uma função dependente de  $x$  e  $Y$  é uma função dependente apenas de  $y$ . Ao definir-se a função  $\theta$  desta forma, a mesma é dita ser composta por variáveis separáveis. Portanto, as segundas derivadas parciais em relação a  $x$  e a  $y$  são descritas por

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = Y \frac{d^2 X}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2},$$

Dividindo essas equações pelo produto  $XY$  e substituindo na equação para o problema (4), obtém-se

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (5)$$

A solução global para a equação (5) é dada por

$$\theta(x, y) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \text{sen}(\lambda x)] [C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}]. \quad (6)$$

Impondo-se as condições de contorno do problema (4) a fim de calcular o valor das constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , verifica-se

$$\text{Se } \theta(0, y) = 0, \text{ então } C_1 = 0;$$

$$\text{Se } \theta(x, 0) = 0, \text{ então } C_3 = -C_4;$$

$$\text{Se } \theta(L, y) = 0, \text{ então } [C_2 \text{sen}(\lambda L)] [C_4(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})] = 0,$$

porém, duas constantes simultâneas não podem ser zero, então somente o  $\text{sen}(\lambda L) = 0$ , donde  $\lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, 3 \dots$  Portanto substituindo os valores das constantes  $C_1$  e  $C_3$  na solução (6), tem-se que

$$\theta(x, y) = 2C_2 C_4 \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2}\right).$$

197

Por definição

$$\frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} = \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right),$$

$$\text{obtem-se que } \theta(x, y) = C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Como a função  $\theta$  representa a temperatura em cada par ordenado  $(x, y)$  da placa retangular, então

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Por fim, ao aplicar-se a última condição de contorno  $\theta(x, 0) = 1$ ,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi b}{L}\right).$$

Considera-se o coeficiente  $A_n = \frac{\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , que é ortogonal à função  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . Desta forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 1,$$

donde é possível obter os coeficientes  $C_n$

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi h}{L}\right)}, n = 1, 2, 3 \dots$$

Portanto a solução geral da equação de transferência de calor em uma placa retangular é

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi h}{L}\right)}.$$

A partir da definição para a variável  $\theta$  em função de  $T$ , solução para o problema (3), é dada por

$$T(x, y) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi h}{L}\right)}, \quad (7)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são as condições de contorno para o problema (3), considerando as dimensões para a placa retangular  $[0, L] \times [0, h]$ .

### Metodologia da pesquisa

#### *Simulações computacionais: validação da solução analítica por elementos finitos*

A Equação de Laplace, ao modelar o problema de transferência de calor por condução em uma placa retangular bidimensional homogênea, possui solução analítica, indicada pela equação (7). Observa-se que tal solução, para ser utilizada em problemas práticos, requer uma quantidade de cálculos expressiva. Nesse sentido, ferramentas computacionais são adequadas, a fim de minimizar o tempo gasto com cálculos e proporcionar simulações de situações reais com precisão.

O *software* GeMA (Análise de Modelagem Geográfica) foi desenvolvido no Tecgraf, Laboratório Computacional de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, objetivando atuar como uma biblioteca, oferecendo soluções para problemas na área de engenharia através de simulações numéricas, a partir de técnicas matemáticas e físicas. Os programas dentro dessa plataforma podem simular diversos problemas de engenharia, dos mais simples aos mais complexos. O *software* suporta múltiplas soluções, com simulações numéricas envolvendo elementos finitos.

A solução pelo GeMA é construída em três partes: dados do modelo, método da solução e monitor de resultados. É possível definir, a partir desses três elementos, como é a simulação e quais os resultados obtidos ao final da mesma. A execução da simulação utiliza os dados do modelo e o método da solução em um arquivo (monitor de resultados) e, em seguida, o *script* de orquestração calcula os valores. O script de orquestração é o local no qual as soluções são calculadas. Esse script é escrito em linguagem Lua, uma linguagem de programação também desenvolvida na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, que é semelhante ao C++, sendo de fácil entendimento e utilização.

A solução no GeMA pode ser obtida, por um usuário, a partir do detalhamento a seguir.

O primeiro passo na obtenção da solução numérica diz respeito aos parâmetros de entrada. O programa inicia-se, em sua descrição, solicitando ao usuário os parâmetros necessários aos cálculos. Para o problema em questão são pedidos os valores para as seguintes variáveis

$$cond, T_t, T_s, nw, n, w e ,$$

onde

**cond** representa o valor numérico da condutividade térmica do material,  $T_t$  é a temperatura no topo do objeto em estudo,  $T_s$  é a temperatura nas laterais e na parte inferior do objeto. Observa-se que o primeiro parâmetro diz respeito ao tipo de objeto estudado e a composição material do mesmo. Os dois parâmetros seguintes referem-se às fontes externas de calor.

Os parâmetros seguintes referem-se à aproximação numérica através de um Método de Elementos Finitos. **nw** é o número de nós no eixo  $x$ , **nh** é o número de nós no eixo  $y$ , **w** é a dimensão do eixo  $x$  no objeto e **h** é a dimensão do eixo  $y$  no objeto.

Após a inserção dos parâmetros, o *software* define quais serão as variáveis, que no problema em questão é a temperatura  $T$  variando em  $x$  e em  $y$ . Cabe observar que a condutividade térmica **cond** é inserida como uma variável denominada  $k$  durante a execução dos testes.

Como o *software* tem por objetivo calcular uma solução aproximada a partir da solução analítica clássica (7), procede-se à discretização do objeto estudado. Nesse momento, o



programa insere toda a parte de montagem das malhas. Como se trata de uma aproximação por Elementos Finitos, determina-se inicialmente a quantidade de nós que a malha terá

$$local\ xpoints = (0.0, w, nw),$$

$$local\ ypoints = (0.0, , n ).$$

No entanto, destaca-se que o usuário não tem controle sobre a quantidade de nós que serão utilizados na construção da malha. O *software* determina a quantidade de nós a partir dos parâmetros de entrada relacionados às dimensões do objeto ( $w$  e  $n$ ).

O *software* determina, também, que as malhas serão quadradas com análise em duas dimensões ( $x$  e  $y$ ). O programa principal possui subprogramas que estão programados para o cálculo da temperatura e do erro de aproximação e chama-se, também, o subprograma para aplicação de condições nas bordas, que foram inseridas como parâmetros de entrada. O arquivo “ArmadilhoSolver” é o *solver*, em Elementos Finitos, o qual um usuário não tem acesso. Finalizando o processo de solução numérica, o *software* faz uso dos seguintes arquivos: “io.printMesh”, “fem.solve” e “io.printMeshNodeData”, que representam, respectivamente, a impressão da malha, o *solver* global de Elementos Finitos e a impressão dos valores nodais da malha.

200

Para resolver e mostrar na tela para o usuário o cálculo das malhas. Após essa execução do programa, são gerados dois arquivos para análise do usuário. Um desses arquivos é a parte literal do desenvolvimento feito pelo computador, enquanto o outro arquivo, em VTK, é para visualização do obtido. Foi escolhido o *Paraview* para rodar este segundo arquivo e poder visualizar o resultado.

Dentre os problemas que são resolvidos numericamente no ambiente GeMA está o problema de transferência de calor descrito pela Equação de Laplace para placas retangulares. A solução é gerada a partir de (7), implementando-se malhas que definem a geometria do problema e considerando-se como dados de entrada parâmetros físicos como material, densidade, temperatura da fonte, condições de contorno e dimensões da placa. A visualização das malhas geradas pelo *software* GeMA é possível através do *software Paraview*. Ele utiliza uma biblioteca para leitura das malhas e outra para a geração das figuras, chamada *Visualization*

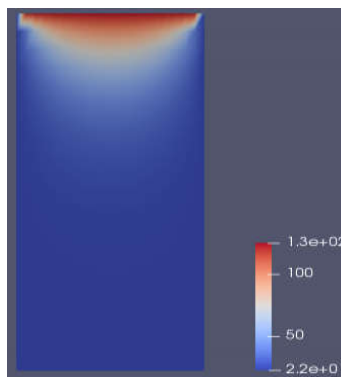
*Toolkit* (VTK). O arquivo no formato VTK é gerado na solução do problema pelo GeMA e assim mostrado pelo *Paraview*.

A fim de simular o fenômeno de transferência de calor regido pela Equação de Laplace, escolheu-se dois materiais homogêneos: o aço e o titânio. Não se utilizou materiais que fossem heterogêneos, uma vez que a Equação de Laplace não se aplica a esses casos. Madureira (2009) descreve um método numérico para obtenção de soluções para o problema de transferência de calor em placas compostas por materiais de comportamento heterogêneo, como é o caso dos materiais compósitos. Verifica-se que as simulações numéricas para este problema são mais complexas e requerem desenvolvimento de Métodos de Elementos Finitos do tipo *upscaling*.

A simulação a seguir foi realizada para o aço, que possui condutividade térmica ( $k$ ) com valor de  $k = 50,2 \text{ W/mC}$  (Ozisik, 1990). A temperatura da fonte na simulação foi de  $125 \text{ }^\circ\text{C}$ . A partir destes dados, obtém-se a Figura 1, na qual se considerou a temperatura lateral ( $T_1$ ) como a temperatura ambiente de  $22 \text{ }^\circ\text{C}$ .

201

**Figura 1-** Placa de aço gerada no GeMA com temperatura em Celsius.



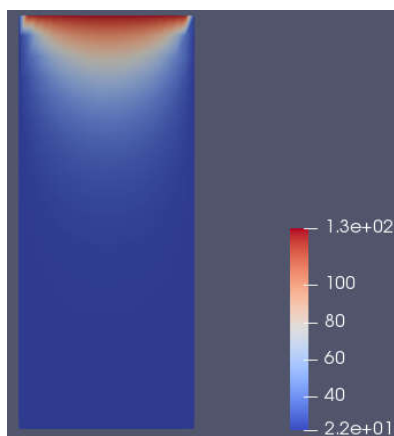
Fonte: GeMA e *ParaView*, os autores, 2018.

Observa-se que a Figura 1 representa uma placa retangular de aço, submetida a uma fonte de calor na borda superior. As cores da figura representam a gradação da temperatura ao longo da placa, caracterizando o processo de transferência de calor por condução.

O Titânio possui a condutividade térmica ( $k$ ) com valor de  $k = 21,9 \text{ W/mC}$  (Ponto de fusão, 2012). A temperatura da fonte na simulação foi de  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ . Colocando esse valor

de temperatura para a fonte, obtém-se a Figura 2, levando-se em consideração a temperatura lateral ( $T_1$ ) como a temperatura ambiente, sendo nesta simulação o valor utilizado de 22°C.

**Figura 2** - Placa de Titânio gerada no GeMA com temperatura em Celsius.



Fonte: GeMA e ParaView, os autores, 2018.

202

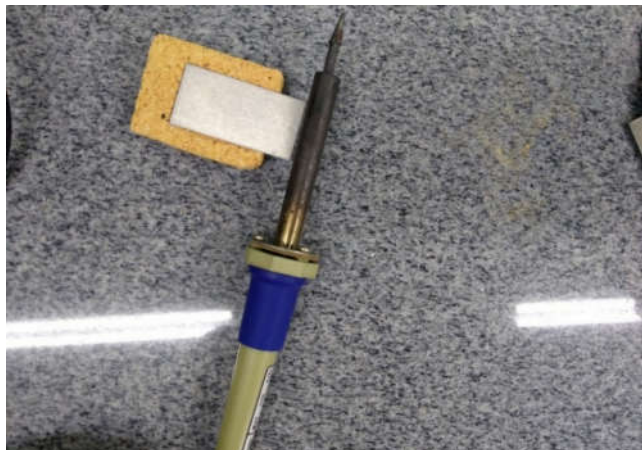
### *Ensaio laboratoriais*

Objetivou-se, a partir dos ensaios laboratoriais, medir experimentalmente a temperatura em pontos específicos de placas retangulares compostas por aço e titânio. Não há na ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) especificações para este tipo de experimento. Desta forma, elaborou-se uma experiência que consistiu em colocar a resistência (fonte de calor), conforme Figura 3, em contato com uma borda da placa que foi determinada como superior e analisar o aumento da temperatura, em ambas as estruturas (placa e fonte). Foi feita uma medição de temperatura com um termômetro a laser, antes de se começar o processo e cinco minutos após, em cada ponto específico da placa e na fonte.

A fonte foi colocada em contato com a placa em uma de suas bordas, para que se faça a transferência de calor no material. A fonte foi uma resistência HIKARI PLUS 127V 60Hz 34W. Para evitar ao máximo a interferência do calor por convecção e por radiação, uma cerâmica foi colocada em torno do material para que haja apenas a análise sobre a transferência por condução. Apesar do uso da cerâmica, ainda é possível verificar a interferência dos outros tipos de calor nos valores obtidos durante a análise. A cerâmica foi cortada e feito um desnível do formato da placa para que pudesse encaixar perfeitamente.

O termômetro utilizado é um termômetro digital infravermelho da marca HIKARI HT-455, com faixa de medição entre 20 a 550 °C, com fonte de energia uma bateria de 9 volts.

**Figura 3** - Aquecimento de uma placa de metal com uma resistência sendo a fonte de calor.



*Fonte:* Os autores, 2018.

203

A Figura 4 representa, esquematicamente, os dois pontos que foram utilizados para colocar o termômetro a laser e realizar as medições da temperatura.

**Figura 4** - Pontos medidos com coordenadas (mm).



*Fonte:* Os autores, 2018.

Em cada placa, foram feitas 9 medições por ponto (totalizando 18 medições, uma vez que se estabeleceu dois pontos por placa) e considerou-se o valor da temperatura, após 5 minutos, em cada ponto, a média aritmética dos 9 valores obtidos. As Tabelas 1 e 2

exemplificam as tabelas em Excel que foram montadas para cada uma das nove medições, considerando-se sempre a temperatura na fonte e nos dois pontos das placas, sempre ao iniciar o ensaio e após 5 minutos.

**Tabela 1** - Valores para a temperatura da placa de aço para a Medição 1.

Aço - Medição 1		
(x;y) em milímetros	0 min.	5 min.
Fonte	21,5 °C	126,3 °C
(12,7;30)	22,0 °C	27,3 °C
(12,7;15)	22,0 °C	23,7 °C

*Fonte:* Os autores, 2018.

**Tabela 2** - Valores para a temperatura da placa de titânio para a Medição 1.

Titânio - Medição 1		
(x;y) em milímetros	0 min.	5 min.
Fonte	25,3 °C	130,8 °C
(12,7;30)	24,4 °C	33,0 °C
(12,7;15)	24,4 °C	27,4 °C

*Fonte:* Os autores, 2018.

## Resultados

A metodologia de pesquisa procurou, através de dois métodos distintos, encontrar o valor da temperatura nos dois pontos especificados da placa: temperatura experimental através de ensaio laboratorial e temperatura via simulação computacional, obtida pela equação (7) implementada pelo software GeMA.

As Tabelas 3 e 4 apresentam as temperaturas, em graus Celsius, para a primeira medição, tanto para o aço quanto para o titânio. Nessas tabelas, a parte teórica se deu colocando a fórmula da Equação do Calor, que ao determinar o par ordenado  $(x,y)$  obtém o valor da temperatura naquele ponto, e, na parte prática, inseriu-se os valores obtidos diretamente pelos termômetros no ensaio laboratorial. A utilização do GeMA se dá para o cálculo de todos os pontos juntos e o Excel apenas um ponto por vez, coordenada a coordenada. A simulação computacional do *software* GeMA, utiliza os valores das coordenadas dos pontos  $(x,y)$  mapeados na placa, com os mesmos dados de entrada: a temperatura inicial da fonte de calor como 130°C e a temperatura ambiente de 22°C. As

células indicando “fonte” estão representando o valor do fornecedor de alto calor para as placas. Os pontos determinando as coordenadas  $x$  e  $y$  são expressos nas tabelas em milímetros, entretanto, para o cálculo foram utilizados em metro.

A comparação dos valores teóricos e experimentais foi feita para todas as nove medições. Nas placas, as coordenadas  $x = 12,7 \text{ mm}$  e  $y = 15,0 \text{ mm}$  são chamadas de “Ponto 1” e as coordenadas  $x = 12,7 \text{ mm}$  e  $y = 30,0 \text{ mm}$  são chamadas de “Ponto 2”.

**Tabela 3** - Comparação entre a Medição 1 e o valor teórico para o aço.

Aço - Medição 1		
Temp. ambiente	20,40 °C	
Fonte	126,30 °C	
(x;y) em milímetro	Temp. laboratório	Temp. Teórico
(12,7;30)	27,30 °C	29,60 °C
(12,7;15)	23,70 °C	21,81 °C

*Fonte:* Os autores, 2018.

205

**Tabela 4** - Comparação entre a Medição 1 e o valor teórico para o titânio.

Titânio - Medição 1		
Temp. ambiente	21,90 °C	
Fonte	130,80 °C	
(x;y) em milímetro	Temp. laboratório	Temp. Teórico
(12,7;30)	33,00 °C	31,36 °C
(12,7;15)	27,40 °C	23,34 °C

*Fonte:* Os autores, 2018.

## Discussão

Conforme descrito anteriormente, os ensaios laboratoriais realizados não são normatizados pela ABNT. Nesse sentido, é necessário garantir a confiabilidade dos resultados apresentados. Uma das formas de se fazer inferências a respeito de um parâmetro desconhecido se dá através dos testes de significância, um ramo importante da estatística (Wild e Seber, 2004). Desta forma, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (KS). Tal teste é paramétrico, o qual avalia a aproximação de uma distribuição de dados amostrais com uma distribuição teórica (Marchi, 2011), neste caso, com a distribuição normal de probabilidades. Sua avaliação tem como resposta duas hipóteses:

$H_0$ : ser uma distribuição normal,

$H_1$ : não ser uma distribuição normal.

Assumimos, como hipótese, que a distribuição dos dados referentes à medições laboratoriais se comporta como uma distribuição normal. Desta forma, espera-se que os valores se dispersem de maneira bem próxima, com pequenos desvios. O teste KS analisa, em módulo, o maior valor desses desvios. Neste trabalho, aplicou-se o teste para cada valor coletado em laboratório, utilizando 9 amostras como a quantidade total, ou seja, 9 é espaço amostral. Para cada ponto em cada placa foi adotado um espaço amostral. Foram calculados a média e o desvio padrão de cada espaço amostral. Utilizou-se o Excel para efetuar os cálculos.

Da Tabela 5 a 8 são demonstrados os cálculos para o teste KS. Nestas tabelas são indicados os números das amostras (i) e seus respectivos valores medidos em laboratório. A seguir, é calculada a distribuição normal de cada valor presente através da função no Excel “DIST.NORM.N”. Esta função depende do valor da média e do desvio padrão para seu cálculo. Busca-se encontrar a máxima diferença entre os desvios e os valores da distribuição normal gerados pelo Excel. Para isso, é calculado o desvio de cada ponto e, logo após, é obtido o valor do maior dentre todos estes. Para obter os desvios, utiliza-se as seguintes fórmulas:

$$D = \text{máximo} (D+, D^-),$$
$$D+ = \text{máximo} \left( \frac{i}{n} - F(x) \right),$$
$$D^- = \text{máximo} \left( F(x) - \frac{(i-1)}{n} \right),$$

sendo “n” a quantidade de amostras, “i” o número da amostra, e F(x) a distribuição normal.

**Tabela 5** - Cálculo dos desvios para a temperatura da placa de aço obtida 5 minutos após o início do ensaio.

Amostra (i)	Temp. Aço – Ponto 1	Valores ordenados	Distribuição Normal	D <sup>+</sup>	D <sup>-</sup>
1	23,70	22,60	0,020206556	0,0909046	0,0202066
2	25,30	23,70	0,197966828	0,0242554	0,0868557
3	24,10	24,10	0,340050349	0,006717	0,1178281
4	25,20	24,40	0,466174187	0,0217297	0,1328409
5	22,60	24,50	0,509675179	0,0458804	0,0652307
6	24,40	25,10	0,751470579	0,0848039	0,195915
7	25,40	25,20	0,784730535	0,0069528	0,1180639
8	24,50	25,30	0,815251193	0,0736377	0,0374734
9	25,10	25,40	0,842926832	0,1570732	0,0459621

Fonte: Os autores, 2018.

Quantidade (n) = 9;

Média = 24,478;

Desvio Padrão = 0,916;

Desvio Máximo = 0,195915024.

207

**Tabela 6** - Cálculo dos desvios para a temperatura da placa de aço obtida após 5 minutos do início do ensaio.

Amostra (i)	Temp. Aço - Ponto 2	Valores ordenados	Distribuição Normal	D <sup>+</sup>	D <sup>-</sup>
1	27,30	26,20	0,059912296	0,0511988	0,0599123
2	29,50	27,30	0,141014293	0,0812079	0,0299032
3	26,20	28,90	0,352724784	0,0193915	0,1305026
4	34,00	29,40	0,436475091	0,0079694	0,1031418
5	29,40	29,50	0,453707459	0,1018481	0,009263
6	28,90	30,20	0,574948587	0,0917181	0,019393
7	30,20	31,00	0,704672374	0,0731054	0,0380057
8	31,40	31,40	0,76187178	0,1270171	0,015906
9	31,00	34,00	0,967572758	0,0324272	0,0786839

Fonte: Os autores, 2018.

Quantidade (n) = 9;

Média = 29,767;

Desvio Padrão = 2,293;

Desvio Máximo = 0,130502562.



**Tabela 7** - Cálculo dos desvios para a temperatura da placa de Titânio obtida após 5 minutos do início do ensaio.

Amostra (i)	Temp. Titânio - Ponto 1	Valores ordenados	Distribuição Normal	D <sup>+</sup>	D <sup>-</sup>
1	27,40	26,30	0,13969184	0,028580	0,139692
2	28,90	26,40	0,160111656	0,062111	0,049001
3	29,20	26,60	0,206510905	0,126822	0,015711
4	28,80	26,90	0,289286585	0,155158	0,044047
5	26,60	27,30	0,418924016	0,136632	0,025520
6	27,30	27,40	0,453453376	0,213213	0,102102
7	26,30	28,80	0,866702946	0,088925	0,200036
8	26,40	28,90	0,88466718	0,004222	0,106889
9	26,90	29,20	0,928096967	0,071903	0,039208

Fonte: Os autores, 2018.

Quantidade (n) = 9;

Média = 27,533;

Desvio Padrão = 1,140;

Desvio Máximo = 0,21321329.

208

**Tabela 8** - Cálculo dos desvios para a temperatura da placa de Titânio obtida após 5 minutos do início do ensaio.

Amostra (i)	Temp. Titânio - Ponto 2	Valores ordenados	Distribuição Normal	D <sup>+</sup>	D <sup>-</sup>
1	33,00	30,20	0,059354973	0,051756	0,05936
2	35,30	31,30	0,181090822	0,041131	0,069980
3	35,10	31,50	0,213825792	0,119508	0,008396
4	33,00	32,60	0,442662894	0,001782	0,109330
5	31,30	33,00	0,536562446	0,018993	0,092118
6	32,60	33,00	0,536562446	0,130104	0,018993
7	30,20	33,60	0,67211999	0,105658	0,005453
8	31,50	35,10	0,908367402	0,019479	0,130590
9	33,60	35,30	0,926298763	0,073701	0,037410

Fonte: Os autores, 2018.

Quantidade (n) = 9;

Média = 32,844;

Desvio Padrão = 1,695;

Desvio Máximo = 0,130589624.

O nível de significância é o tamanho do risco que se pode correr, ou seja, o erro presente na análise dos desvios para que valores da amostra se comportem como a função desejada, no caso deste trabalho, a distribuição normal (Wild e Seber, 2004). Para isso, o maior valor dos desvios calculados (Desvio Máximo) deve ser menor do que o valor crítico equivalente, isto é,  $D_{\text{máx}} < D_{\text{crít}}$ .

A Figura 5 apresenta os valores para os desvios críticos, obtidos para porcentagem de erros distintas e dependendo, também, da quantidade de dados do espaço amostral. Por exemplo, para erros ou rejeição dos valores obtidos até 5%, basta efetuar  $\frac{1,36}{\sqrt{n}}$ , sendo  $n$  a quantidade de dados no espaço amostral.

**Figura 5** - Níveis de significância.

0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Fonte: Marchi, 2011.

209

Como o espaço amostral deste trabalho é composto de nove medições ( $n = 9$ ), os valores para o desvio crítico são dados pela Tabela 9.

**Tabela 9** - Níveis de significância para  $n=9$ .

20%	10%	5%	1%
0,357	0,407	0,453	0,543

Fonte: Os autores, 2018.

Desta forma é possível observar que todos os  $D_{\text{máx}}$  são menores do que a aceitação do erro de 1%, isto é,  $D_{\text{máx}} < D_{\text{crít}}$  para todos os testes. Conclui-se, através do teste KS, que a hipótese nula  $H_0$  será aceita e que o conjunto de dados representante das temperaturas medidas nos ensaios laboratoriais se aproxima de uma distribuição normal, com rejeição de 1% dos valores, ficando dentro do intervalo de confiança

Ponto 1 do aço:  $24,478 \pm 0,916$  °C;

Ponto 2 do Aço:  $29,767 \pm 2,293$  °C;

Ponto 1 do Titânio:  $27,533 \pm 1,140$  °C;

Ponto 2 do Titânio:  $32,844 \pm 1,695$  °C.

Após a análise dos valores encontrados em laboratório serem aceitas pelo teste KS, é feita a comparação, por erros absolutos e relativos, entre os resultados obtidos em laboratório com os valores teóricos para a temperatura. Caso os erros absolutos e relativos sejam aceitáveis, pode-se afirmar que a equação (7), que rege o programa GeMA, é uma solução precisa para o problema de transferência de calor (3), capaz de simular com exatidão os resultados experimentais.

Realizou-se o cálculo do erro relativo e do erro absoluto para se verificar o quão próximo ou quão longe os valores estão. Adota-se o cálculo do erro absoluto e relativo pelas equações

$$E_{abs} = T_{real} - T_{teórico},$$

$$E_{rel.(\%)} = \left( \frac{T_{real} - T_{teórico}}{T_{teórico}} \right) 100.$$

Foram calculados os erros absolutos e relativos máximos encontrados em cada ponto e a Tabela 10 mostra quais são os maiores valores.

210

**Tabela 10** - Erro absoluto e Erro Relativo.

	Erro Absoluto (°C)	Erro relativo (%)
Ponto 1 – Aço	3,92	15,43
Ponto 2 – Aço	3,15	12,02
Ponto 1 – Titânio	5,83	19,97
Ponto 2 – Titânio	3,56	10,14

*Fonte:* Os autores, 2018.

Os maiores erros relativos tiveram uma variação de até 20%. Altos valores para o erro relativo nesses pontos são explicados devido ao fato das medidas laboratoriais terem influência do operador e condições ambientais. Apesar do fato descrito anteriormente, pôde-se perceber que as variações de temperatura nas placas de aço e titânio se dão de uma forma bem aproximada, tanto na simulação computacional quanto nos experimentos laboratoriais.

A partir desta análise pode-se concluir que, para materiais homogêneos, os valores para a temperatura obtidos pelo software GeMA se aproximam dos valores reais, não tendo a necessidade de fazer medições experimentais com a peça no seu ambiente de atuação. Apenas a simulação no computador é suficiente para obter os valores aproximados da variação de temperatura em um material exposto à troca de calor com uma fonte quente.

Como na engenharia mecânica são mais utilizados materiais homogêneos, como metais, a aplicação desse programa é de ampla utilidade prática.

Para outros casos, como aplicação na Engenharia Civil na qual materiais são, em geral, mais heterogêneos, sua análise deve ser vista com maior critério.

Por fim, propõe-se, para trabalhos futuros, a análise de como os fatores físicos podem interferir na comparação entre os valores real e teórico e como tratamentos térmicos podem modificar a variação em um material homogêneo. Tal análise, com novos valores, pode ser capaz de aproximar com maior precisão os dois resultados obtidos.

### **Conclusão**

Ao apresentar a Equação de Laplace como modelo matemático para o problema de transferência de calor por condução, este trabalho procurou discutir a aplicabilidade de modelos matemáticos a situações reais, considerando a possibilidade de utilização de simuladores computacionais na melhoria dos cálculos e validação de hipóteses para ensaios laboratoriais.

Pode-se observar, através dos valores para a temperatura obtidos em uma placa retangular de material homogêneo, tanto computacionalmente quanto experimentalmente, que é possível certificar a variação de temperatura em placas de metal através de simulações computacionais. Há um pequeno erro de aproximação devido a fatores físicos que influenciaram os resultados laboratoriais, como a interferência do calor por convecção e radiação, a umidade do ar, densidade do ar e pressão atmosférica. As variações por convecção e radiação foram desprezadas, uma vez que seus valores são pequenos, comparados aos valores altos gerados na fonte e que o modelo descreve a transferência de calor por condução, apenas. Com o intuito de comprovar a veracidade do modelo matemático e do *software*, este trabalho analisou uma placa retangular.

A garantia de precisão para os valores da temperatura, obtidos pela simulação computacional, é de suma importância na engenharia, visto que permite a obtenção de valores de temperatura em estruturas sem o uso de termômetro ou outro tipo de instrumento de medida no objeto físico. Observa-se que a simulação permite avaliar o valor da temperatura em cada ponto do corpo físico ou analisar a variação de temperatura nesse, a partir de informações básicas, como a temperatura em torno do objeto e a condutividade

térmica do material. Constatou-se, ao final do trabalho, a validação do modelo matemático analítico a partir de aproximações numéricas construídas por Elementos Finitos, destacando-se a precisão dos resultados numéricos quando comparados ao experimento laboratorial. A partir de tal fato, pode-se inferir que, em algumas situações, os experimentos físicos podem ser substituídos por resultados oriundos de simulações computacionais.

### Referências

CARIUS, A.C.; MADUREIRA, A. L. Hierarchical modeling of heterogeneous plates. **Applied Numerical Mathematics**, v. 59, pp. 2105-2118, 2009.

EVANDRO AUGUST BLOGS. **Ponto de fusão**. Disponível em: <<http://evandro-august.blogspot.com/2012/03/ponto-de-fundicao-de-alguns-metais-aco.html>>.

IÓRIO, V. **EDP, Um curso de Graduação**. Editora IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

MARCHI, R. D. **Estudo sobre a variabilidade do módulo de deformação do concreto associada a fatores intrínsecos à produção do material**. 2011. Tese de Mestrado – Universidade de São Paulo, São Paulo.

MOREIRA, J. **Processos de transferência de Calor**. 2015. Texto para uso didático disponível em forma digital na internet – Faculdade de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Paulo.

OZISIK, M. N. **Transferência de calor, Um texto básico**. Rio de Janeiro, Editora Guanabara. Koogan S.A, 1990.

TECGRAF. **GeMA**. Disponível em: <[www.tecgraf.puc-rio.br/gema/gema/doxygen/html/index.html](http://www.tecgraf.puc-rio.br/gema/gema/doxygen/html/index.html)>. Acesso em: 26 agos. 2018.

WILD, C. J; SEBER, G.A. **Encontros com o Acaso: um primeiro curso de Análise de Dados e Inferência**. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2004.